第 5 講　円

PART1　円と直線，円の弦の長さ

1　点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C と，点 $(0,\ -1)$ を通る傾き m の直線 l がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ。

Point Pickup

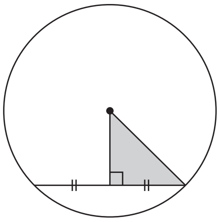
円と直線の位置関係は，円の方程式と直線の方程式から，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式 D の符号，または円の中心と直線の距離 d と円の半径 r の大小関係を調べることでわかる。

①　$D>0 \iff d<r \iff$ 異なる 2 点で交わる

②　$D=0 \iff d=r \iff$ 接する

③　$D<0 \iff d>r \iff$ 共有点をもたない

円の弦の長さに関しては，円の中心から弦に下ろした垂線がその弦を 2 等分することを利用し，三平方の定理を適用するとよい。



第 5 講　PART1　確認問題

点 $(-2,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 C と，点 $(0,\ 1)$ を通る傾き m の直線 l がある。

1 直線 l と円 C が共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

ア

① $-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \leqq m \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

② $m \leqq -\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3} \leqq m$

③ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \leqq m \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

④ $m \leqq \dfrac{1-\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \leqq m$

⑤ $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

⑥ $m \leqq \dfrac{2-\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \leqq m$

2 直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが 2 であるとき，m の値を求めよ。

$m =$ イ，$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$

第 5 講　円

PART1　円と直線，円の弦の長さ

1　点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C と，点 $(0,\ -1)$ を通る傾き m の直線 l がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ。

$C:(x-2)^2+y^2=1$　　$l:y=mx-1$

(1)　(解法 1)

$y=mx-1$ を $(x-2)^2+y^2=1$ に代入して

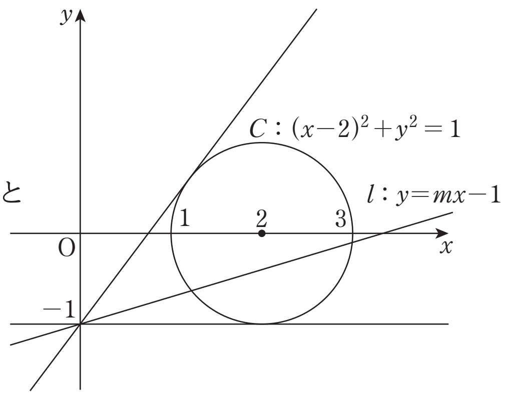
$$(x-2)^2+(mx-1)^2=1$$

$$(m^2+1)x^2-2(m+2)x+4=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2+1)\cdot 4$$

$$=-m(3m-4)$$



l と C が共有点をもつのは $D \geqq 0$ のとき

よって　$m(3m-4) \leqq 0$ より　$0 \leqq m \leqq \dfrac{4}{3}$

(解法 2)

円 C の中心 $(2,\ 0)$ と直線 l: $mx-y-1=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|m\cdot 2-0-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

l と C が共有点をもつのは $d \leqq$ (円 C の半径)のときであるから

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} \leqq 1 \qquad |2m-1| \leqq \sqrt{m^2+1} \qquad (2m-1)^2 \leqq m^2+1 \qquad m(3m-4) \leqq 0$$

よって　$0 \leqq m \leqq \dfrac{4}{3}$

(2)　円 C の中心を C とし，C から直線 l に下ろした垂線を CH とする。また，直線 l と円 C の 2 つの交点を A，B とすると，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ であり

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

△ACH において，三平方の定理より

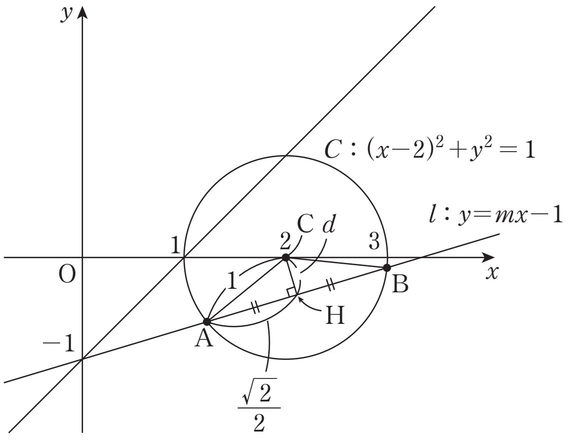
$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AH}^2$$

$$\left(\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$2(2m-1)^2=m^2+1$$

$$(7m-1)(m-1)=0$$

よって　$m=\frac{1}{7}$，1



第 5 講　PART1　確認問題 解答

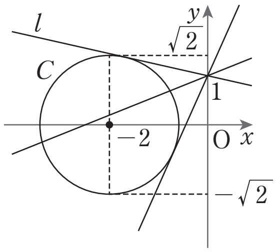
1

[正解] ア：⑤

[解説]

$C：(x+2)^2+y^2=2$

$l：y=mx+1$



（解法 1）

$y=mx+1$ を

$(x+2)^2+y^2=2$ に

代入すると

$$(x+2)^2+(mx+1)^2=2$$

$$(m^2+1)x^2+2(m+2)x+3=0$$

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+2)^2-(m^2+1)\cdot 3$$

$$=-2m^2+4m+1$$

l と C が共有点をもつのは，$D \geqq 0$ のときであるから

$$-2m^2+4m+1 \geqq 0 \quad \text{[A]}$$

$$2m^2-4m-1 \leqq 0$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

（解法 2）

円 C の中心 $(-2,\ 0)$ と $l：mx-y+1=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|m\cdot(-2)-0+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{[B]}$$

l と C が共有点をもつのは，$d \leqq$（円 C の半径）のときであるから

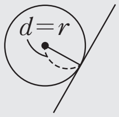
$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} \leqq \sqrt{2}$$

[A]　円と直線の位置関係

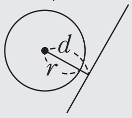
円と直線の方程式から 1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とし，円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

[1]　異なる 2 点で交わる
$\Longleftrightarrow D>0$
$\Longleftrightarrow d<r$

[2]　接する
$\Longleftrightarrow D=0$
$\Longleftrightarrow d=r$



[3]　共有点をもたない
$\Longleftrightarrow D<0$
$\Longleftrightarrow d>r$



[B]　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\sqrt{m^2+1}>0$ より　$|-2m+1| \leqq \sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから 2 乗すると

$$(-2m+1)^2 \leqq 2(m^2+1)$$

$$2m^2-4m-1 \leqq 0$$

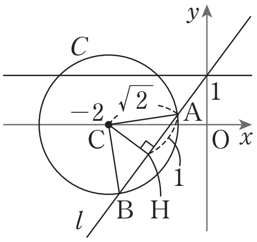
よって　$\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

2

[正解] イ：0，ウ：4，エ：3

[解説]

円 C の中心を C とし，C から直線 l に下ろした垂線を CH とする。



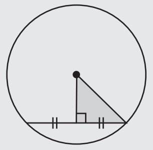
CH の長さは，点 C と直線 l：$mx-y+1=0$ の距離と等しいから

$$\mathrm{CH}=\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{[B]}$$

また，直線 l と円 C の 2 つの交点をそれぞれ A，B とすると，AB $=2$ であるから

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=1 \quad \text{[C]}$$

[C]　円の中心から弦に下ろした垂線は，その弦を二等分する。



△ACH において，三平方の定理より

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AH}^2$$

$$\left(\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=(\sqrt{2})^2-1^2$$

$$(-2m+1)^2=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0$$

よって　$\boldsymbol{m=0,\ \dfrac{4}{3}}$